ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE, DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS, DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DE LA MÉTALLURGIE ET DE L'INDUSTRIE DES MINES DE NANCY, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (OPTION T.A.)

***

1981 — MATHÉMATIQUES II

OPTION P'

(Durée 4 heures)

Les deux premières parties sont indépendantes l'une de l'autre. Les trois premières questions de la troisième partie peuvent être traitées indépendamment des deux premières parties.

$\mathbb{R}[X]$ désigne l'anneau des polynômes à une indéterminée sur le corps des réels.

I - A tout triplet de suites de réels $a = (a_n)$, $b = (b_n)$, $c = (c_n)$ $n = 1, 2, \ldots$ vérifiant la condition :

$$(1) \quad \forall\, n = 1, 2, \ldots, b_n c_n > 0$$

on associe la suite de matrices M_n où M_n est la matrice carrée d'ordre n définie par :

$$M_n = (m_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \qquad m_{i,i} = a_i \; ; \; m_{i,i+1} = b_i \; ; \; m_{i,i-1} = c_{i-1}$$

$$m_{i,j} = 0 \text{ si } j \notin \{i-1, i, i+1\} .$$

par exemple $M_4 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & c_3 & a_4 \end{pmatrix}$

On dira que M_n est la suite de matrices continuantes associées à (a, b, c).

1°) (a, b, c) étant donné vérifiant (1), on note Δ_n le déterminant de la matrice M_n construite ci-dessus. Prouver :

a - $\forall n = 2, 3 \ldots . \quad \Delta_{n+1} = a_{n+1} \Delta_n - b_n c_n \Delta_{n-1}$

b - Il existe une suite (h_i) de réels non nuls tels que, si H_n est la matrice carrée d'ordre n, diagonale, de termes diagonaux h_i, la matrice $M'_n = H_n M_n H_n^{-1}$ soit le terme d'ordre n d'une suite de matrices continuantes symétriques.

.../...

c - En déduire que les valeurs propres de M_n sont toutes réelles. Est-ce que M_n est diagonalisable ?

On admettra dans la suite que la matrice M_n n'a que des valeurs propres simples.

2°) Soit (a_n) et (b_n) deux suites de réels n = 1, 2, ... ; de plus $\forall n\ b_n > 0$. Soit la suite des polynômes D_n définis par :

$$D_o = 1 \quad , \qquad D_1 = a_1 + X$$

$$\forall n = 1, 2, \ldots \qquad D_{n+1} = (a_{n+1} + X)\, D_n - b_n\, D_{n-1}$$

Préciser le degré de D_n et le coefficient de X^n.

Montrer que toutes les racines de D_n sont réelles et simples.

II - Soit h l'application de $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}[X] \qquad h(P, Q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} P\left(\frac{1}{n}\right) Q\left(\frac{1}{n}\right)$$

1°) Montrer que h(P, Q) est défini pour tout couple P et Q de $\mathbb{R}[X]$; prouver que h est une forme bilinéaire symétrique positive et non dégénérée sur $\mathbb{R}[X]$ et qu'elle vérifie :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}[X] \qquad h(XP, Q) = h(P, XQ)$$

2°) Soit ϕ l'application de $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}[X] \qquad \phi(P, Q) = \int_{-1}^{+1} P(x)\, Q(x)\, dx$$

Prouver que ϕ est une forme bilinéaire, définie sur $\mathbb{R}[X]$ symétrique positive et non dégénérée et qu'elle vérifie :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}[X] \qquad \phi(XP, Q) = \phi(P, XQ)$$

3°) Supposons qu'il existe une fonction g, définie sur $\mathbb{R}$, continue positive ou nulle telle que :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}[X] \quad . \quad h(P, Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\, Q(x)\, g(x)\, dx$$

.../...

a - Montrer que $g(x)$ est nul pour $|x| > 1$.

Indication : considérer $h(X^p, X^p)$ $p \in \mathbb{N}$.

b - Montrer que, pour tout x différent de $\frac{1}{n}$ $n \in \mathbb{N}$, $g(x)$ est aussi nul.

Indication : on pourra d'abord montrer que pour toute fonction

réelle ψ continue sur $[-1, 1]$, il peut être posé : $h(\psi, \psi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \psi(\frac{1}{n})^2$.

En déduire :

$$h(\psi,\psi) = \int_{-1}^{+1} g(x)\ \psi(x)^2\ dx$$

en utilisant le résultat qui sera admis :

$\forall \psi \in C^\circ([-1, +1])\ \forall \varepsilon\ \exists\ P \in \mathbb{R}[X] : \forall x \in [-1, +1]\ \ |\psi(x) - P(x)| < \varepsilon$

On choisira alors une fonction ψ particulière.

c - En déduire qu'il n'existe pas de telle fonction g.

III - Dans la suite f désigne une forme bilinéaire symétrique, positive et non dégénérée sur $\mathbb{R}[X]$ telle que :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}[X] \qquad f(X P, Q) = f(P, X Q)$$

1°) Montrer qu'il existe au moins une suite de polynômes P_n, $n \in \mathbb{N}$, de degré n, qui est une famille libre et vérifie :

$$\forall p \neq q \qquad p, q \in \mathbb{N} \qquad f(P_p, P_q) = 0$$

Est-ce que $f(P_n, P_n)$ peut être nul ?

Indication : Une suite de polynôme P_n $n \in \mathbb{N}$ pourra être construite à l'aide d'un raisonnement par récurrence :

Supposant connus $P_o, P_1, \ldots, P_{n-1}$, le polynôme P_n est déterminé par la relation :

$$P_n = X^n + \sum_{p=o}^{n-1} \lambda_p P_p$$

Soit donc une suite de polynômes P_n $n = 0, 1, 2, \ldots$ tels que :

$$\forall n \quad \text{degré } P_n = n$$

$$\forall p, q \qquad p \neq q \qquad f(P_p, P_q) = 0$$

.../...

2°) Montrer les propriétés suivantes :

$\forall\ p, n \in \mathbb{N} \quad : p < n \qquad f(X^p, P_n) = 0$

Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$; soit q = degré de Q :

$\forall\ n > q \qquad f(Q, P_n) = 0$

Est-ce que $f(P_n, X P_{n-1})$ peut être nul ? $n = 1, 2, \ldots$

3°) Prouver qu'il existe trois suites réelles u_n, v_n, w_n $n = 1, 2, \ldots$. telles que :

$$P_1 = (u_1 + X v_1) P_o$$

$\forall\ n = 1, 2, \ldots \qquad P_{n+1} = (u_{n+1} + X v_{n+1}) P_n + w_n P_{n-1}$

Montrer : $\forall\ n = 1, 2, \ldots \quad v_n \neq 0 \ , \qquad w_n \neq 0.$

4°) Soit D_n le polynôme :

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \qquad D_n = \frac{1}{v_o v_1 \cdots v_n} P_n$$

v_o désigne la valeur prise par le polynôme P_o.

Montrer : $D_1 = a_1 + X$

$\forall\ n = 1, 2, \ldots \qquad D_{n+1} = (a_{n+1} + X) D_n - b_n D_{n-1}$

a_n et b_n sont deux suites de réels.

Démontrer que les coefficients b_n sont, pour tout n, strictement positifs.

En déduire que les racines des polynômes P_n sont toutes réelles et simples.

5°) Soit R_n :. $\quad R_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$

Vérifier que R_n est un polynôme de degré n.

Calculer pour $p \neq q \quad p, q \in \mathbb{N} \quad \phi(R_p, R_q)$.

Qu'en déduire sur les racines de R_n ?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail